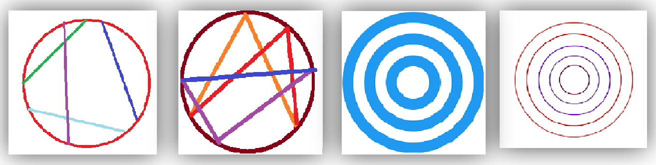
SSLC Mathematics Chapter 10

CIRCLES

6/30/2015

Yakub S, GHS Nada,Belthangady Taluk, D.K., 574214 Ph:9008983286

ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯಗಳು



ಅಧ್ಯಾಯ -10 ವೃತ್ತಗಳು

1. ಜ್ಯಾ

- ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.
- ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮ.
- ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ ಲಘುಕೋನ.
- ಲಘುವೃತ್ತ ಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ ಅಧಿಕ ಕೋನ.
- ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ.
- ಒಂದೇ ವೃತ್ತಕಂಡದೊಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

2. ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು

- ಒಂದೇ ಕೆಂದ್ರ ಆದರೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು.

3. ಸಮವೃತ್ತಗಳು

- ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಸಮವೃತ್ತಗಳು

4. ವೃತ್ತ ಛೇದಕ

- ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ

5. ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ

- ವೃತ್ತವನ್ನು ಏಕೈಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ

6. ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು

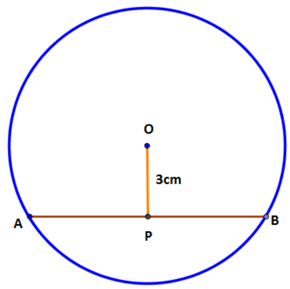
- ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದು

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಲಕ್ಷಣಗಳು

- ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸ್ಪರ್ಶಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಕೇಂದ್ರವಲ್ಲದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಕೇಂದ್ರವಲ್ಲದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.
- ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.
- ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡೇ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.
- ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.
- ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುವರು.
- ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ d = R + r (R,r ಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
- ವೃತ್ತಗಳು ಅಂತ:ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ d = R -r
- ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುವರು.
- ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುವರು.
- ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{d^2 - r^2}$
- ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$
- ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t =$\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$

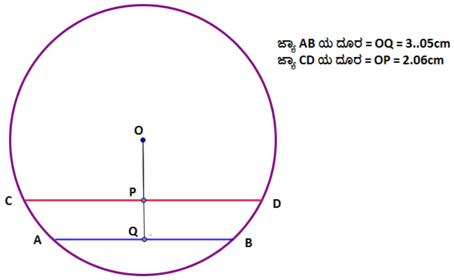
ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. 3.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 6cm ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ.

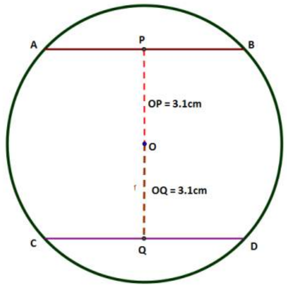


ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಕ್ಕಿರುವ ದೂರ OP = 1.8cm

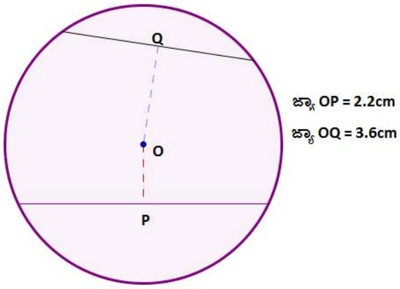
2. 6cm ಮತ್ತು 8cm ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು 4.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಿರುವುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.



3. 4.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 6.5cm ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ.

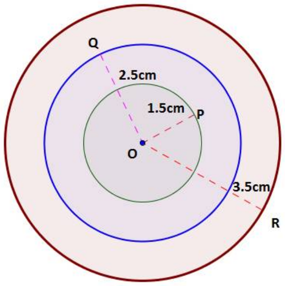


4. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ 9cm ಮತ್ತು 7cm ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

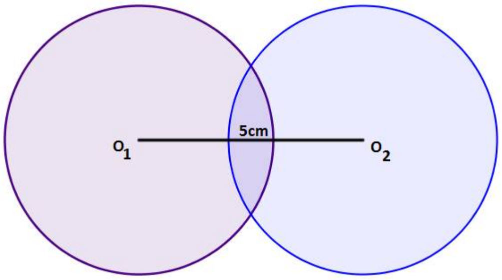


ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. O ಕೆಂದ್ರವಾಗಿ 1.5cm, 2.5cm ಮತ್ತು 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಮೂರು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

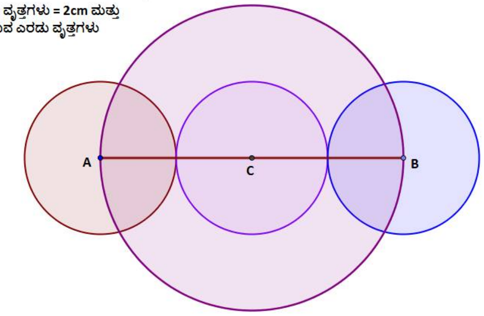


2. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 5cm ಇರುವಂತೆ O_1 ಮತ್ತು O_2 ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ 3cmತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

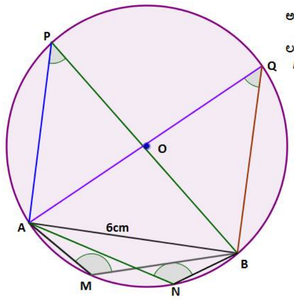


3. AB = 8cmಇರುವ ರೇಖಾಖಂಡದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. A, B ಮತ್ತು C ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವಂತೆ 2cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. C ಕೇಂದ್ರವಿರುವಂತೆ 4cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ಮತ್ತು ಸರ್ವ ಸಮ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ..ಹೆಸರಿಸಿ.

ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು= 2cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ 3 ವೃತ್ತಗಳು
ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳು = 2cm ಮತ್ತು 4cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು

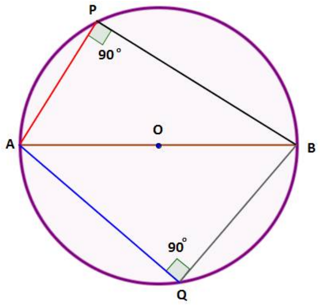


4. 4 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 6cm ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು,ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳೆಂದು, ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ ದೊಳಗಿನ ಅಧಿಕ ಕೋನಗಳೆಂದು ಅಳೆಯುವು ದರಿಂದ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.



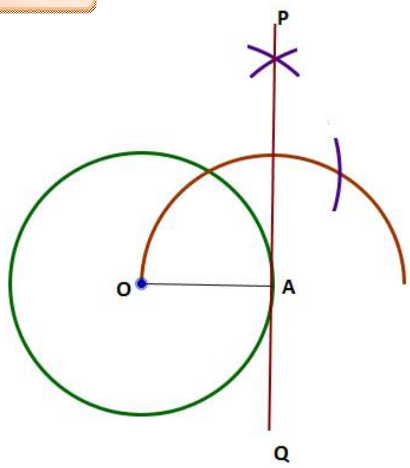
ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕೋನಗಳು
$\angle APB = \angle AQB = 49^\circ$
ಲಘುವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕೋನಗಳು
$\angle AMB = \angle ANB = 131^\circ$

5. O’ ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ, 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸ AOB ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವ್ಯಾಸದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತ ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನ ಗಳೆಂದು ಅಳೆಯುವದರ ಮೂಲಕ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

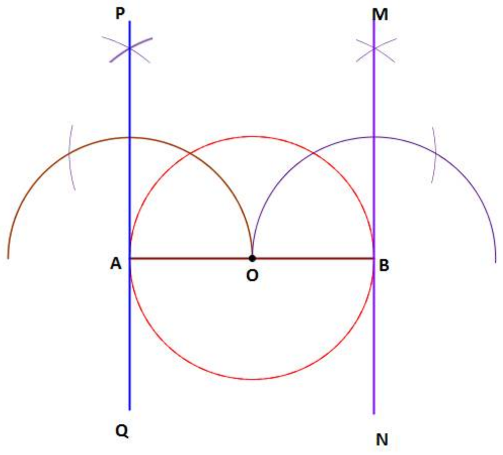


ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

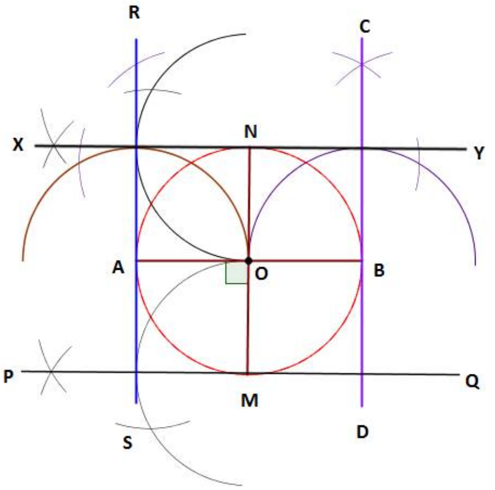
1. 4cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



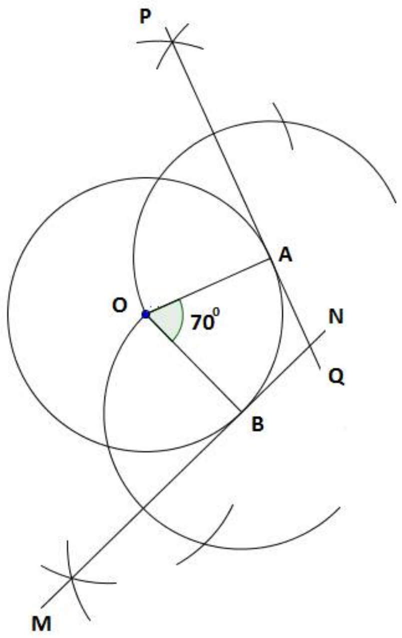
2. 7cm ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ.ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



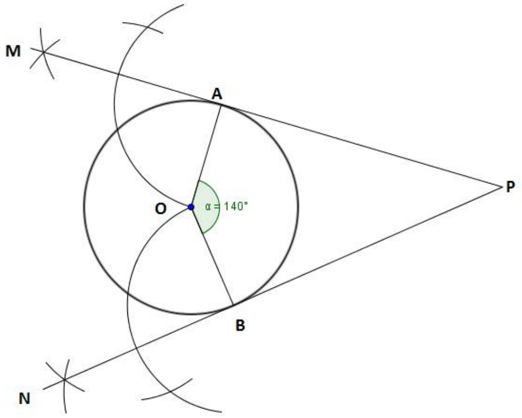
3. 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



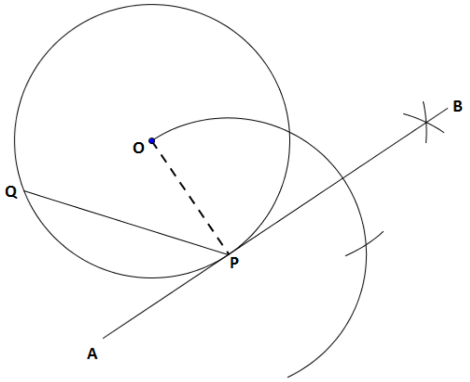
4. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 70^0 ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



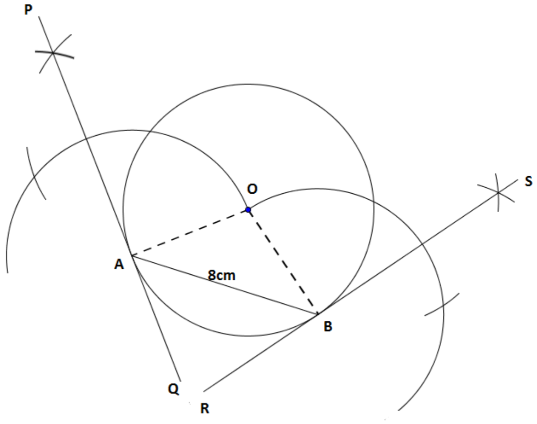
5. 3cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 40^0 ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



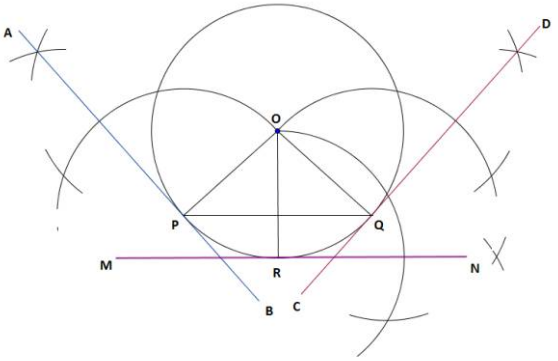
6. 4.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 7cm ಉದ್ದದ PQ ಜ್ಯಾವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



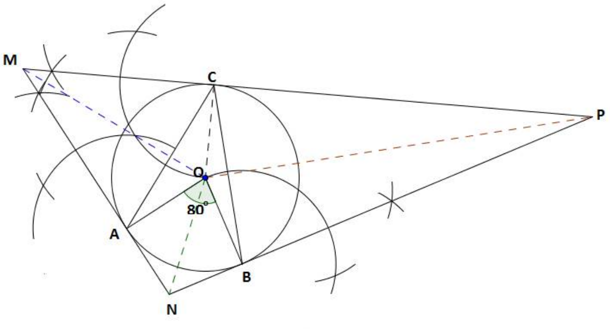
7. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 8cm ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



8. 4cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 6cm ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

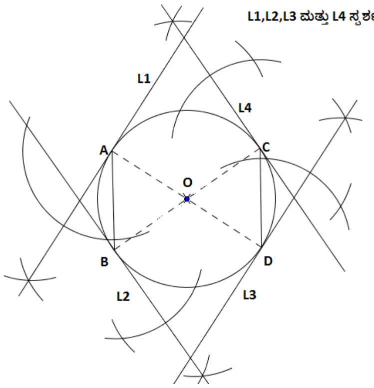


9. 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 80^0 ಕೋನವನ್ನು ಹಾಗೂ ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಅಂತಸ್ಥ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ.ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ನೀವೇನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.



ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ದತ್ತ ವೃತ್ತವು ಅಂತರ್ ವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ

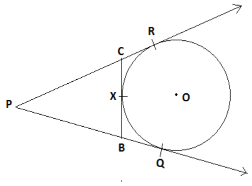
10. 4.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ,ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ 5cm ಉದ್ದದ ಎರಡು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.ಜ್ಯಾದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

A.ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ PQ, PR ಮತ್ತು BC ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. BC ಯು ವೃತ್ತವನ್ನು X ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದೆ. PQ = 7cm ಆದರೆ ΔPBC ಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ΔPBC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ = PC + PB + BC

= PC + PB + BX + CX

ಆದರೆ CX =CR ಮತ್ತು BX = BQ [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

∴ PC + PB + BQ + CR

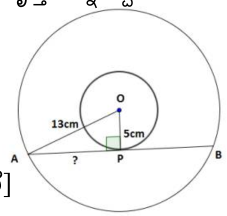
= (PC + CR) + (PB + BQ)

= PR + PQ

= 7 + 7 [∵ PR=PQ,ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

= 14cm

2. 5cm ಮತ್ತು 13cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಹೊರ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ, AB ಯು P' ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

AP = PB [∵ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯ(ಲಂಬ) ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ]

ΔOAP ಯಲ್ಲಿ, $\angle OPA = 90^o$

$\therefore AP^2 + OP^2 = OA^2$ [$\because$ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ]

$\Rightarrow AP^2 + 5^2 = 13^2$
$\Rightarrow AP^2 + 25 = 169$
$\Rightarrow AP^2 = 169-25$
$\Rightarrow AP^2 = 144$
$\Rightarrow AP = 14cm$
$\therefore$ ಜ್ಯಾ $AB = AP + PB = 14 + 14 =$ **28cm**

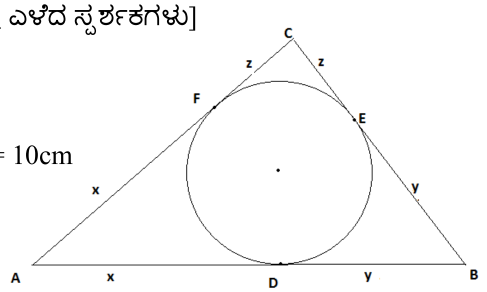
3. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, AB = 12cm, BC = 8cm ಮತ್ತು AC = 10cm

ಆದರೆ AF, BD ಮತ್ತು CE ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$AB + BC + CA = 12 + 8 + 10$
$\Rightarrow AD + BD + BE + CE + AF + CF = 30$
ಆದರೆ AF = AD = x [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

BE = BD = y [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

CE = CF = z [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

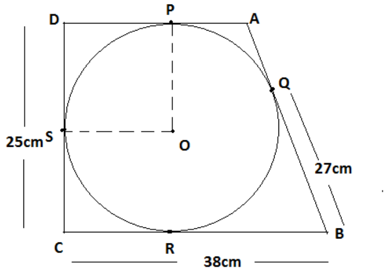


$\therefore x + y + y + z + z + x = 30$
$\Rightarrow 2x + 2y + 2z = 30$
$\Rightarrow x + y + z = 15$ ------(1)
AB = x+y = 12cm, BC = y+z=8cm, AC = x+z = 10cm
(1)$\Rightarrow 12 + z = 15$ [$\because x + y = 12cm$]
$\therefore z = 15 – 12$
$\therefore z = 3cm$
(1)$\Rightarrow x + 8 = 15$ [$\because y + z = 8cm$]
$\therefore x = 15 – 8$
$\therefore$ x= 7cm ,BD = y = 5cm,
(1)$\Rightarrow y + 10 = 15$ [$\because x + z = 10cm$]
$\therefore y = 15 – 10$
$\therefore$ y= 5cm
$\therefore$ **AF = x = 10cm, BD = y = 5cm , CE = z = 3cm**

4. ದತ್ತ ಚಿತ್ರ ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ BC = 38cm,

QB = 27cm ಮತ್ತು DC = 25cm $AD\perp DC$ ಆದರೆ

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ OPDS ನಲ್ಲಿ,

DS = DP [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

OP = OS [$\because$ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\angle D = 90^0$ [$\because AD\perp DC$]

$\therefore$ OPDS ಒಂದು ವರ್ಗಾಕೃತಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,

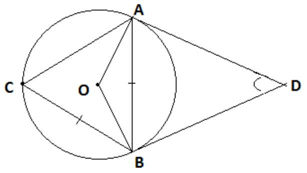
BQ = BR = 27 cm [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

CR = 38 – 27 = 11cm = CS [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

DS = 25 -11 = 14cm = DP [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

∴ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = OP = OS = 14cm [∵OPDS ಒಂದು ವರ್ಗಾಕೃತಿ.]

5. ದತ್ತ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB = BC, ∠ABC = 68^0, DA ಮತ್ತು DB ಗಳು O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾದರೆ (i) ∠ACB (ii) ∠AOB ಮತ್ತು (iii) ∠ADB ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB = BC, ∠ABC = 68^0

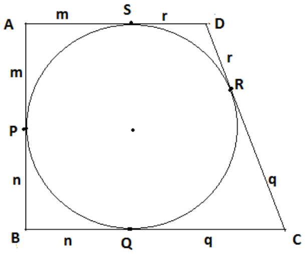
(i). ∠ACB = ∠BAC = $180^0 – 68^0 = \frac{180^0 - 68^0}{2} = \frac{112}{2} = 56^0$ [∵AB = BC]

(ii). ∠AOB= 2x∠ACB = 2x56 = 112^0
[∵ ಒಂದೇ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ =2xಪರಿಧಿಕೋನ]

(iii). ∠ADB = 180^0- ∠AOB = $180^0 – 112^0 = 68^0$
[∵ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ + ಕೇಂದ್ರಕೋನ =180]

B. ಸ್ಪರ್ಶಕ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರಿತ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

1. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. AB + CD = AD + BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



AP = AS = m [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

BP = BQ = n [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

CQ = CR = q [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

DR = DS = r [∵ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

AB + CD = AP + BP + CR + DR = m + n + q + r --------(1)

AD + BC = AS + DS + BQ + CQ = m + r + n + q
=m + n + q+ r---------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

AB + CD = AD + BC

2. O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು A ಯಿಂದ AP ಮತ್ತು AQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

∠PAQ = 2∠OPQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

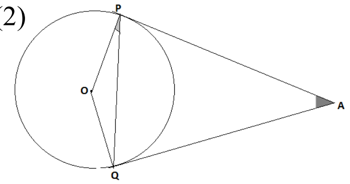
∠POQ + ∠PAQ = 180^0 [∵ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ + ಕೇಂದ್ರಕೋನ =180] ---------(1)

ΔPOQ ನಲ್ಲಿ ∠OPQ = ∠OQP [∵OP=OQ,ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

ΔPOQ ನಲ್ಲಿ, ∠POQ + ∠OPQ + ∠OQP = 180^0 [∵ತ್ರಿಭುಜದ 3 ಕೋನಗಳು]

∴ ∠POQ + 2∠OPQ = 180^0 [∵∠OPQ = ∠OQP] -------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,



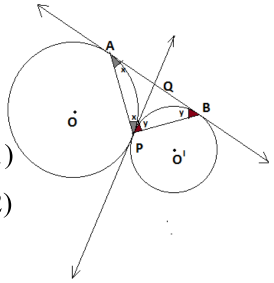
∠POQ + ∠PAQ = ∠POQ + 2∠OPQ

∠PAQ = 2∠OPQ

3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿವೆ.. AB ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾದರೆ,

(a) P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

(b) $\angle APB = 90^0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



(a) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,

QA = QP[$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]---(1)

QB = QP[$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]---(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

QA = QB

$\therefore$ P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

(b). ΔAPB ಯಲ್ಲಿ,

$\angle QAP = \angle APQ = x$ [$\because$ QA = QP]

$\angle QPB = \angle BPQ = y$ [$\because$ QB = QP]

$\therefore$ ΔAPB ಯಲ್ಲಿ $x + x + y + y = 180^0$ [$\because$ತ್ರಿಭುಜದ 3 ಕೋನಗಳು]

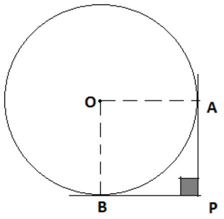
$\Rightarrow 2x + 2y = 180^0$

$\Rightarrow x + y = 90^0$

$\Rightarrow \angle APB = 90^0$

4. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,



PA = PB [$\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]

OA = OB [$\because$ ಒಂದೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\angle APB = 90^0$ [$\because$ ದತ್ತ]

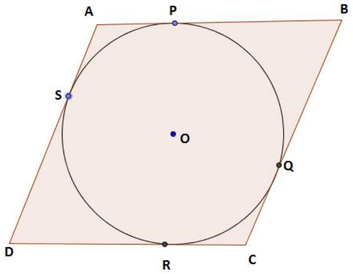
$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ [$\because$ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ]

$\therefore \angle AOB = 90^0$ [$\because$ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 360^0]

$\therefore$ OABP ಒಂದು ವರ್ಗಾಕೃತಿ

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶಕ (PA ಮತ್ತು PB) = ತ್ರಿಜ್ಯ (OA ಮತ್ತು OB)

5. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತಿವೆ,ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ABCD ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.

$\therefore$ AB∥CD, AB = CD [$\because$ ದತ್ತ]

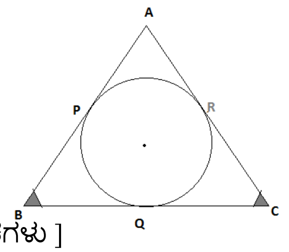
AD∥BC, AD = BC [$\because$ ದತ್ತ]

AP = AS, PB = BQ
DS = DR, QC = RC
($\because$ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು)

$\Rightarrow$AB + CD = AP +PB + CR + DR

$\Rightarrow AB + CD = AS + BQ + QC + DS$
$\Rightarrow AB + CD = (AS + DS) + (BQ + CQ)$
$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$
$\Rightarrow 2AB = 2AD$ [∵ ದತ್ತ AB = CD; AD = BC]
$\Rightarrow AB = AD$
$\Rightarrow AB = AD = CD = BC$
⇒ABCD ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ [∵ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ]

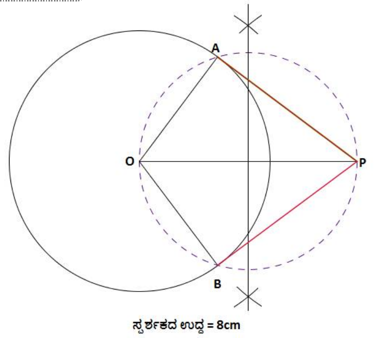
6. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB = AC ಆದರೆ BQ = QC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



AP = AR -----(1) [∵ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]
ಮತ್ತು AB = AC ---------(2) [∵ ದತ್ತ]
(1) – (2)
∴ AB – AP = AC - AR
∴ BP = CR
ಆದರೆ, BQ = BP ಮತ್ತು CQ = CR [∵ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು]
∴ BQ = CQ

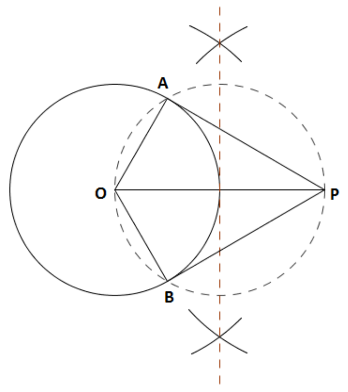
ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

1. 6cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10cm ದೂರದಲ್ಲಿನ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ

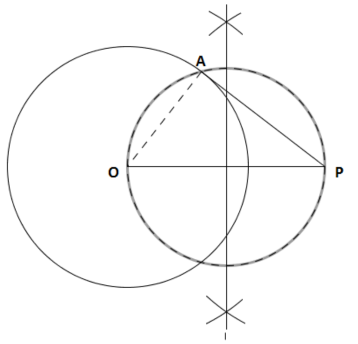


ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{d^2 - r^2}$
ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{10^2 - 6^2}$
ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{100 - 36}$
ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $\sqrt{64}$
ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ t = $8cm$

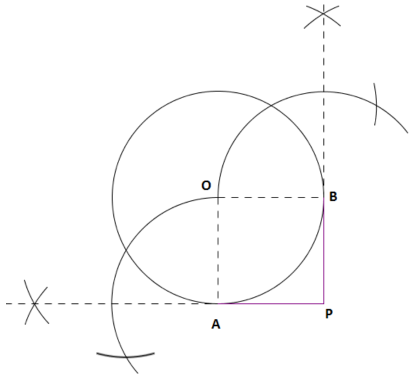
2. 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವೃತ್ತದಿಂದ 3.5cm ದೂರದಲ್ಲಿನ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



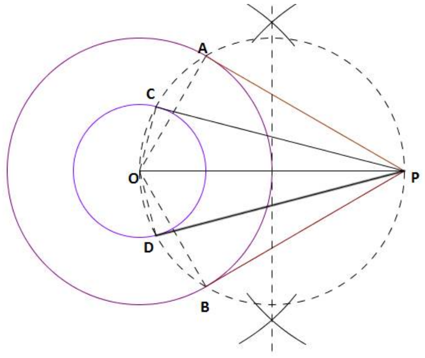
3. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ವೃತ್ತದಿಂದ 3.5cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



4. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ 5cm ಉದ್ದದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



5. 2cm ಮತ್ತು 4cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 8cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

A.ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.

1. ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7cm,8cm ಮತ್ತು 9cm ಗಳಾದರೆ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ,

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು AP = x, BQ = y ಮತ್ತು CR = z ಆಗಿರಲಿ.

AB = AP+BP = x+y = 7cm

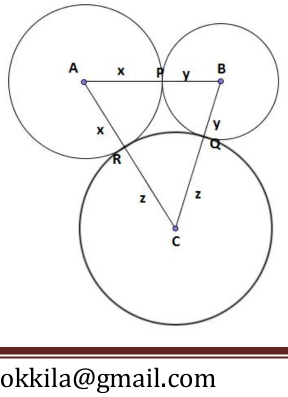
BC = BQ+CQ= y+z = 8cm

AC = CR+AR= z+x = 9cm

ΔABCಯ ಸುತ್ತಳತೆ $\Rightarrow$ AB + BC + AC = 7 +8 + 9 = 24

$\Rightarrow$ AP + BP + BQ + CQ +CR + AR=24

$\Rightarrow$ x + y + y + z +z + x = 24



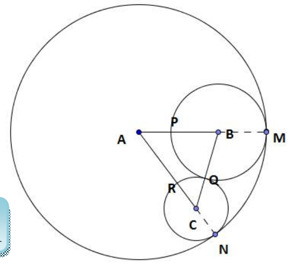
$\Rightarrow 2x + 2y + 2z = 24$
$\Rightarrow x + y + z = 12$

$7 + z = 12 \Rightarrow z = 12 - 7 = 5cm$ [$\because x + y = 7$]
$x + 8 = 12 \Rightarrow x = 12 - 8 = 4cm$ [$\because y + z = 8$]
$y + 9 = 12 \Rightarrow y = 12 - 9 = 3cm$ [$\because z + x = 9$]

2. A, B ಮತ್ತು C ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿವೆ. ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8cm, 3cm ಮತ್ತು 2cm ಗಳಾದರೆ, ΔABCಯ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ = AB + BC + AC

AB = AM – BM = 8 – 3 = 5cm
BC = BQ + CQ = 3 + 2 = 5cm
AC = AN – CN = 8 – 2 = 6cm

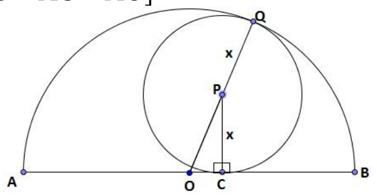


$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ = AB + BC + AC = 5 + 5 + 6 = 16cm

3. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB = 10 cm, AC = 6cm ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು x cm ಗಳಾದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ΔOPC ಯಲ್ಲಿ, $\angle PCO = 90^0$

$\therefore PC^2 = OP^2 - OC^2$
$\therefore x^2 = (OQ - PQ)^2 - (AC - OA)^2$ [$\because$ OP = OQ – PQ, OC = AC – AO]
$\therefore x^2 = (5 - x)^2 - (6 - 5)^2$ [$\because$ OQ = OA=5]
$\therefore x^2 = 25 - 10x + x^2 - 1$



$\therefore 10x = 24 \Rightarrow x = 2.4cm$

B. ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿನ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.

1. A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ AP॥BQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

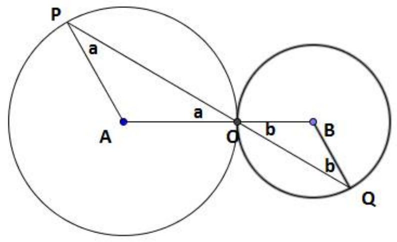
$\angle AOP =$ BOQ [$\because$ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು]

$\angle APO = \angle AOP$ [$\because$ AO=AP ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\angle BQO = \angle BOQ$

$\Rightarrow \angle APO = \angle BQO$

ಇವು ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು



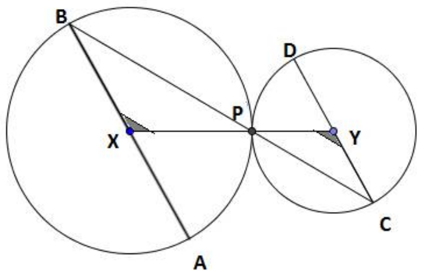
$\therefore$ AP॥BQ

2. X ಮತ್ತು Y ಕೇಂದ್ರಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. AB ಮತ್ತು CD ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ. B, P, ಮತ್ತು C ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\angle BXP = \angle PYC$ [$\because$ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು AB॥CD]

$\angle BPX = \angle PBX$ [$\because$XB=XP ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\therefore \angle BPX + \angle PBX + \angle BXP = 180^0$



$\therefore 2\angle BPX + \angle BXP = 180^0$-------(1)

$\angle CPY = \angle PCY$ [$\because$YP=YC ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\therefore \angle CPY + \angle PCY + \angle PYC = 180^0$

$\therefore 2\angle CPY + \angle PYC = 180^0$-------(2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ.

$2\angle BPX + \angle BXP = 2\angle CPY + \angle PYC$

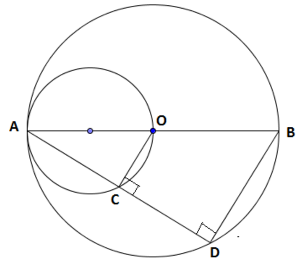
$\Rightarrow 2\angle BPX = 2\angle CPY$

$\Rightarrow \angle BPX = \angle CPY$

ಇವು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು

$\therefore$ B,P,C ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

3. O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸ AB ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ AD ಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. OA ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತವು AD ಯನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದಿದೆ. BD = 2OC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



$\angle ADB = 90^0$ [$\because$ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ]

$\angle ACO = 90^0$ [$\because$ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದೊಳಗಿನ ಕೋನ]

ΔADB ಮತ್ತು ΔAOC ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle ADB = \angle ACO = 90^0$

$\angle A = \angle A$ [$\because$ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta AOC$ [$\because$ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯ]

$\therefore$ ಮೂ.ಸ.ಪ್ರ.ಪ್ರಕಾರ

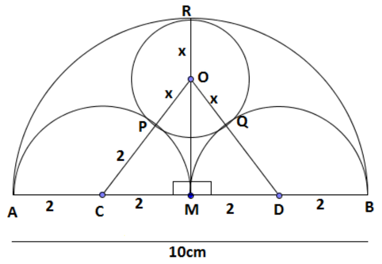
$\frac{BD}{OC} = \frac{AB}{AO}$

$\Rightarrow \frac{BD}{OC} = \frac{2AO}{AO}$ [$\because$ AB=2AO]

$\Rightarrow \frac{BD}{OC} = 2$

$\Rightarrow$ BD = 2OC

4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ, AB, AM ಮತ್ತು MB ವ್ಯಾಸಗಳ ಮೇಲೆ ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. O' ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವು ಈ ಮೂರು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸ್ಪರ್ಶಸಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{1}{6}$AB ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ΔOPC ಯಲ್ಲಿ, $\angle POC = 90^0$

$\therefore OC^2 = OM^2 + MC^2$ [$\because$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯ]

$\therefore (CP+OP)^2 = (MR-OR)^2 + MC^2$

$\therefore (2 + x)^2 = (4 - x)^2 + 2^2$

$\therefore 4 + 4x + x^2 = 16 – 8x + x^2 + 4$

$\therefore 4 + 4x = 16 – 8x + 4$

$\therefore 12x = 16$

$\therefore x = \frac{16}{12}$

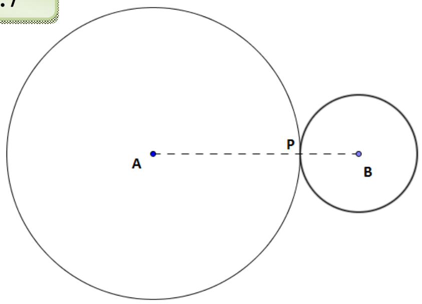
$\therefore x = \frac{8}{6}$

$\therefore x = \frac{1}{6}$ x 8

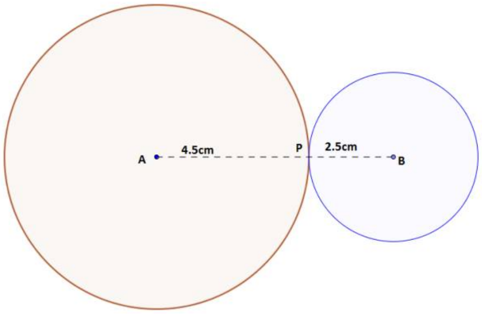
$\therefore x = \frac{1}{6}$ AB [$\because$ AB=8]]

ಅಭ್ಯಾಸ 10.7

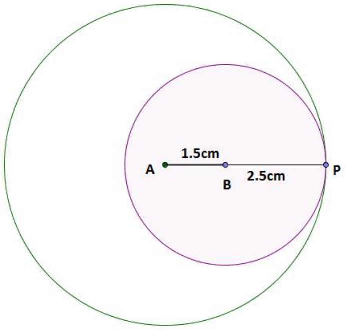
1. 5cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.



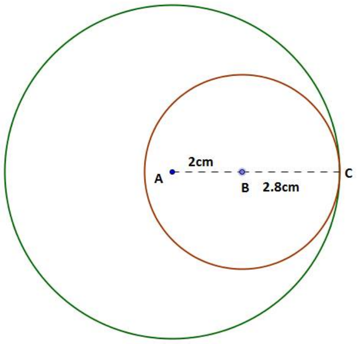
2. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 7cm ಇರುವಂತೆ 4.5cm ಮತ್ತು 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



3. 4cm ಮತ್ತು 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಅಂತ:ಸ್ಪರ್ಶ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

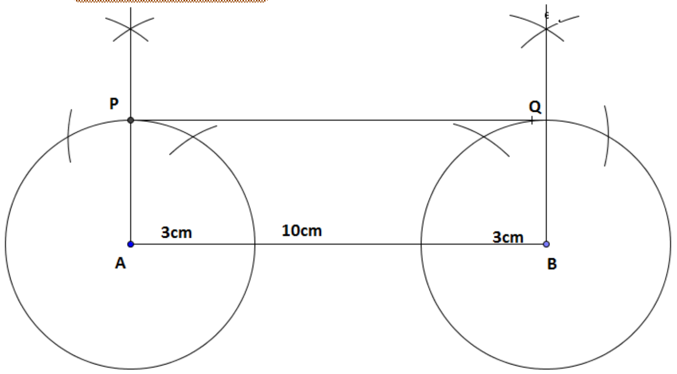


4. ಎರಡು ಅಂತ:ಸ್ಪರ್ಶ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 2cm ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4.8cm ಗಳಾದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

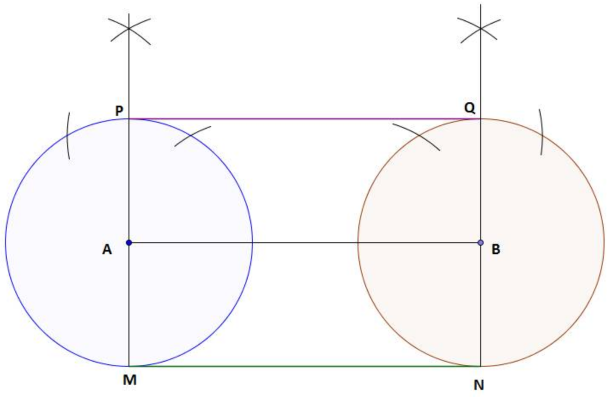


ಅಭ್ಯಾಸ 10.8

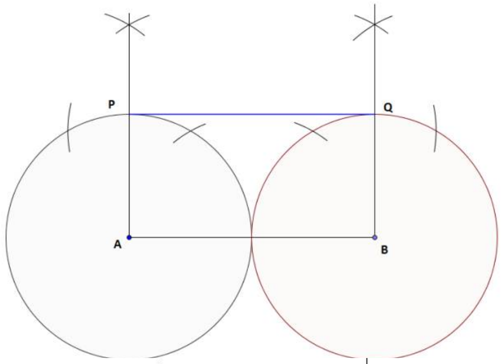
I.(A).1. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10cm ಇರುವ 3cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



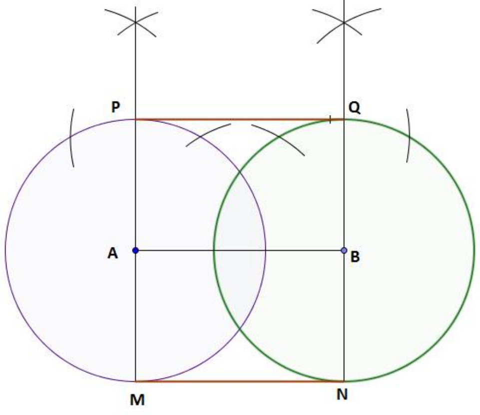
2. ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 3cm ಇರುವ 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಎರಡು ಸರ್ವ ಸಮ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಎರಡು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



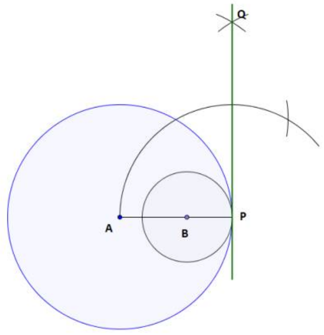
3. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



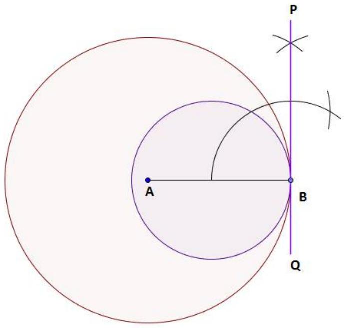
4. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 4cm ಇರುವ 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



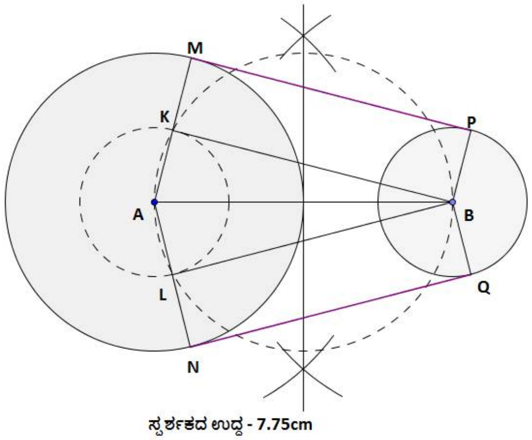
(B). 1. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 3cm ಇರುವ 5cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



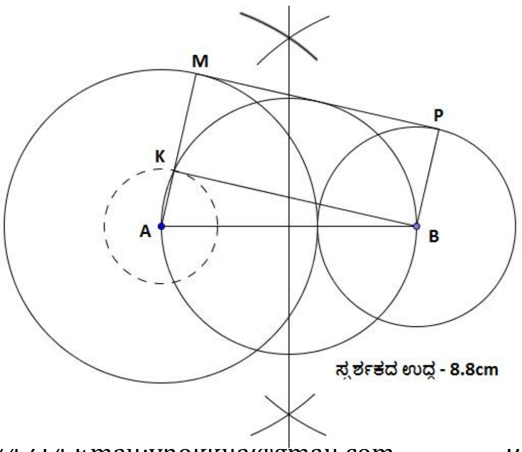
2. 4.5cm ಮತ್ತು 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಅಂತರ್ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



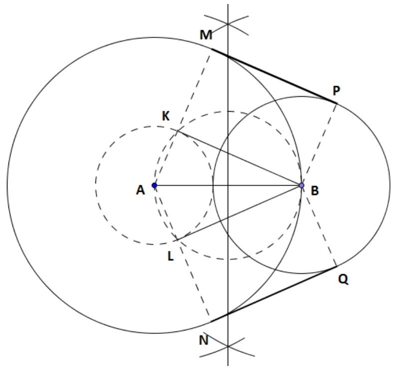
3. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 8cm ಇರುವ 4cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅಳೆದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.



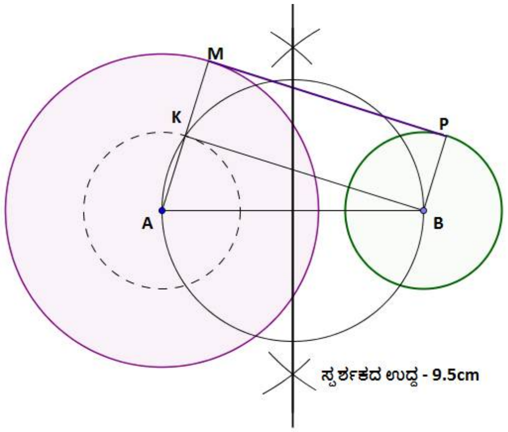
4. 5.5cm ಮತ್ತು 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ.



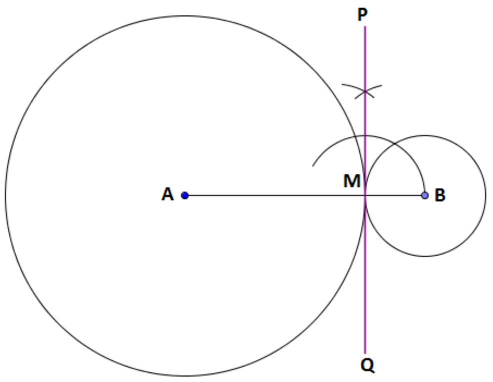
5. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 5cm ಇರುವ 5cm ಮತ್ತು 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.



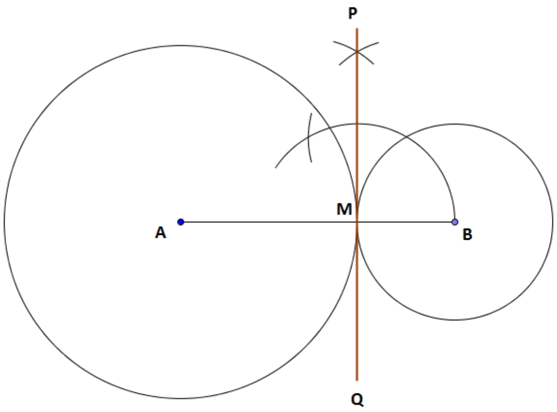
6. 6cm ಮತ್ತು 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು 1cm ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ.ಒಂದು ನೇರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅಳೆದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.



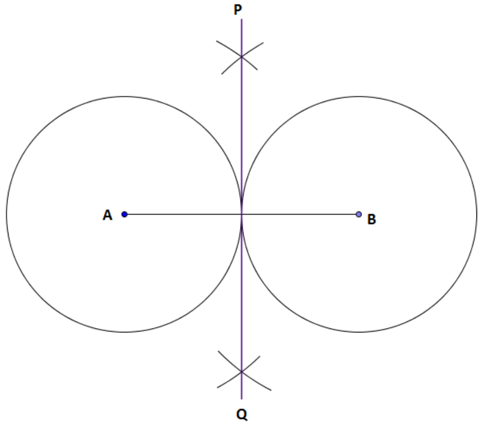
II.(A). 1. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 8cm ಇರುವ 6cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



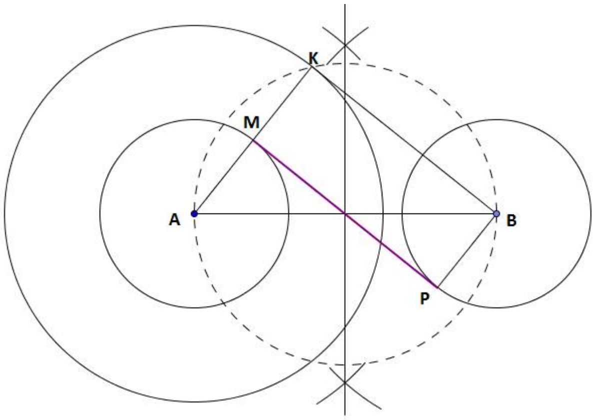
2. 4.5cm ಮತ್ತು 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



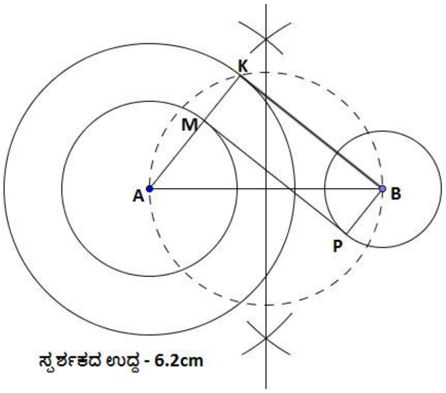
3. 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 6cm ಇದೆ. ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



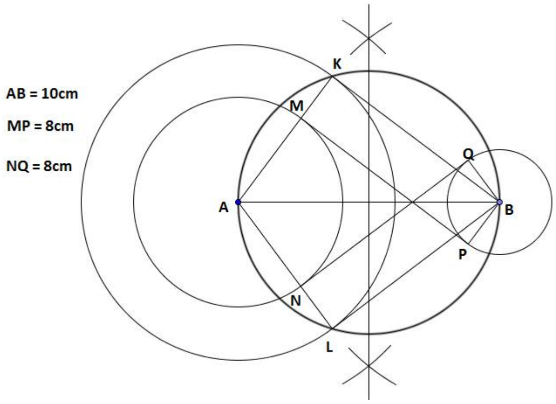
(B). 1. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 8cm ಇರುವ 2.5cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಮ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.



2. 3cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು 8cm ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ. ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ.



3. 4cm ಮತ್ತು 2cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ 8cm ಉದ್ದದ ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅಳೆದು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.



4. ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 10cm ಇರುವ 4cm ಮತ್ತು 3cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅಳೆದು ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

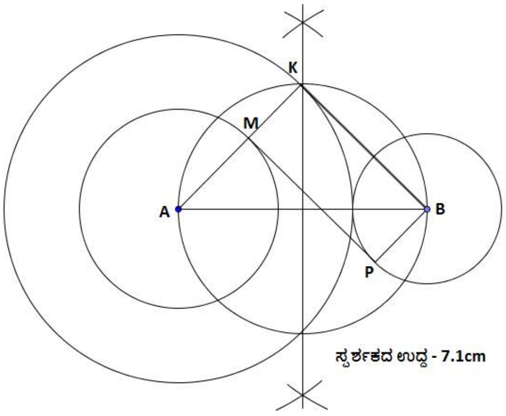
t = $\sqrt{d^2 - (R+r)^2}$

t = $\sqrt{10^2 - (4+3)^2}$

t = $\sqrt{100 - 49}$

t = $\sqrt{51}$

t = $7.1cm$



]

5. 2.5cm ಮತ್ತು 3.5cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ 8cm ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

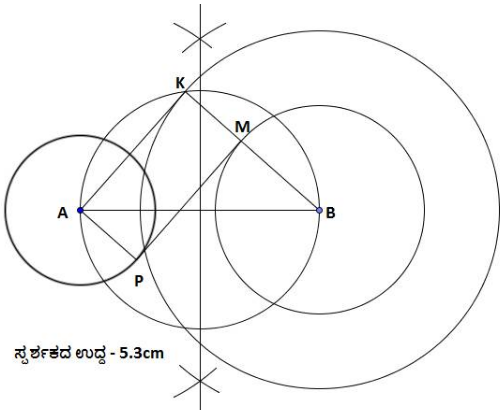
t = $\sqrt{d^2 - (R+r)^2}$

t = $\sqrt{8^2 - (2.5+3.5)^2}$

t = $\sqrt{64 - 36}$

t = $\sqrt{28}$

t = $5.29cm$



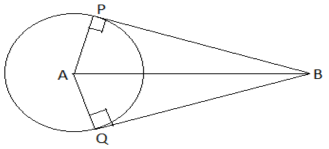
ವೃತ್ತಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ: ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು,

(a) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ

(b) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ

(c) ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ: A ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ.B ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು. BP ಮತ್ತು BQ ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು.

AP, AQ ಮತ್ತು AB ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಸಾಧನೀಯ : (a) BP = BQ

(b) $\angle$PAB = $\angle$QAB

(c) $\angle$PBA = $\angle$QBA

ಸಾಧನೆ: ΔAPB ಮತ್ತು ΔAQB ಗಳಲ್ಲಿ,

AP = AQ [$\because$ ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು]

$\angle$APB = $\angle$AQB =90^0 [$\because$ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಲಂವಾಗಿರುತ್ತದೆ.]

ಕರ್ಣAB = ಕರ್ಣA

$\therefore$ ΔAPB $\equiv$ ΔAQB [$\because$ ಲಂ.ವಿ.ಬಾ.ಸಿದ್ಧಾಂತ]

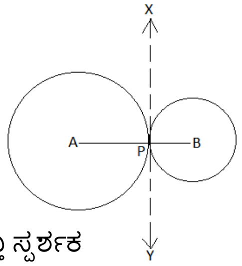
$\therefore$ (a) BP = BQ $\because$ ಸರ್ವಸಮ Δದ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು

(b) $\angle$PAB =$\angle$QAB

(c) $\angle$PBA = $\angle$QB

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಸರಳ ರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುವು.

ಪ್ರಕರಣ-1). ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಏಕರೇಖಾಗತ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ದತ್ತ: A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳು , P ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು.

ಸಾಧನೀಯ : A,P,ಮತ್ತು B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ರಚನೆ: XPY ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle$APX = 90^0……………..(1)

$\angle$BPX = 90^0………… ..(2) [$\because$ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ]

$\angle$APX + $\angle$BPX = 90^0+90^0

[(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ]

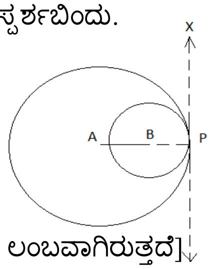
$\angle APB = 180^0$ [APB ಒಂದು ಸರಳಕೋನ]

$\therefore$ APB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ

$\therefore$ A, P ಮತ್ತು B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ

ಪ್ರಕರಣ-2).ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಅಂತ:ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಏಕರೇಖಾಗತ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳು.P ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು.



ಸಾಧನೀಯ : A,P,ಮತ್ತು B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ರಚನೆ : XPY ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ : ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle APX = 90^0$……………..(1)

$\angle BPX = 90^0$ ………… ..(2)

[$\because$ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ]

$\angle APX = \angle BPX = 90^0$

[(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ]

AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ

$\therefore$ APB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ

$\therefore$ A, P ಮತ್ತು B ಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ